Recasages possibles : 235, 241, 246, 250.
Référence : 40 développements, Bernis[2] (p. 253-258)

Développement 1 (Formules de Poisson et de Shannon) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 1 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{2i\pi kt}$.

Corollaire 2 Si $\hat{f}$ est à support contenu dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\operatorname{sinc}\big((t-n)\pi\big).$$

- *Quelques remarques préliminaires* : Dans ce développement, on utilise la transformée de Fourier définie pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx.$$

Notons de plus que toutes les séries sur $\mathbb{Z}$ écrites dans l'énoncé et considérées dans la preuve de ce développement sont définies comme les limites (sous réserve d'existence) des sommes partielles *symétriques*. Par exemple, on définit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n).$$

Enfin, rappelons que la fonction *sinus cardinal* sinc est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{sinc}(x) = \mathbb{1}_{x=0} + \mathbb{1}_{x\neq 0}\frac{\sin(x)}{x}.$$

- *Preuve du Théorème 1* : Commençons par montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+\cdot)$, ainsi que sa série dérivée, convergent normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$. Soient donc $K \subseteq \mathbb{R}$ un compact et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subseteq [-N, N]$. Fixons $i \in \{0,1\}$. Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe $M_i > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(i)}(t)\right| \leqslant \frac{M_i}{1+t^2}$. Ainsi, pour tout $t \in K$, et tout $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geqslant N+1$, on a $|t+n| \geqslant |n| - t \geqslant |n| - N$ donc

$$\left|f^{(i)}(t+n)\right| \leqslant \frac{M_i}{1+(t+n)^2} \leqslant \frac{M_i}{(t+n)^2} \leqslant \frac{M_i}{(|n|-N)^2}.$$

Or, la série $\sum_{|n|\geqslant N+1} \frac{1}{(|n|-N)^2}$ converge par le critère de Riemann, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f^{(i)}(n+\cdot)$ converge normalement sur K. Notons g la somme de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+\cdot)$. Par convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+\cdot)$ et par convergence normale (donc uniforme) sur tout compact de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(n+\cdot)$, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, g est 1-périodique car le changement d'indice $n \to n+1$ donne

$$g(t+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+1+t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+t) = g(t).$$

D'après le théorème de convergence normale de Dirichlet pour les fonctions 1-périodiques de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, la série de Fourier de g converge normalement, donc simplement vers g sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)e^{2i\pi kt}.$$

Calculons donc les coefficients de Fourier de g. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_k(g) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+t)\right) e^{-2i\pi kt}\,dt.$$

Par convergence normale de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+\cdot)$ sur le compact $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on peut intervertir série et intégrale et on obtient alors

$$c_k(g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(n+t)e^{-2i\pi kt}\,dt.$$

Or, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, le changement de variable affine $x = t+n$ donne

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(n+t)e^{-2i\pi kt}\,dt = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(x)e^{-2i\pi k(x-n)}\,dx = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(x)e^{-2i\pi kx}\,dx.$$

Ainsi, la relation de Chasles donne

$$c_k(g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(x)e^{-2i\pi kx}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi kx}\,dx = \hat{f}(k).$$

Finalement, on a bien montré $g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{2i\pi kt}$.

- *Preuve du Corollaire 2* : La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ induit une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'inverse $\check{\mathcal{F}}$ définie par $\check{\mathcal{F}}(f)(x) = \hat{f}(-x)$. Ainsi, en appliquant la formule de Poisson du **Théorème 1** à $\hat{f}$, il vient pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k+\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)e^{2i\pi n\xi}.$$

Or, comme $\hat{f}$ est à support dans $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, si $k \neq 0$, on a $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\hat{f}(k+\cdot) = 0$. Ainsi,

$$\hat{f} = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k+\cdot) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)e^{2i\pi n\cdot}.$$

Fixons $t \in \mathbb{R}$. Par inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi t\xi}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)e^{2i\pi(n+t)\xi}\,d\xi.$$

Le changement d'indice $n \to -n$ donne

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{2i\pi(t-n)\xi}\,d\xi.$$

Or, la série en présence converge normalement sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ car pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left\|f(n)e^{2i(t-n)\cdot}\right\|_{\infty,[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} = |f(n)|$, et on a vu que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+\cdot)$ converge normalement sur tout compact, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|$ converge. Ainsi, on peut intervertir intégrale et somme et on obtient

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi(t-n)\xi}\,d\xi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\mathrm{sinc}\big((t-n)\pi\big).$$

Commentaires et prolongements :

- Justifions cette dernière égalité : soient $n \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$ fixés. Si $t = n$, on a

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi 0\xi}\,d\xi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,d\xi = 1 = \mathrm{sinc}(0) = \mathrm{sinc}(t-n)$$

Si $t \neq n$, alors

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi(t-n)\xi}\,d\xi = \left[\frac{e^{2i\pi(t-n)\xi}}{2i\pi(t-n)}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{i\pi(t-n)} - e^{-i\pi(n-t)}}{2i\pi(t-n)}.$$

Alors, grâce à la formule d'Euler $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, on trouve

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi(t-n)\xi}\,d\xi = \frac{\sin\big((t-n)\pi\big)}{(t-n)\pi} = \mathrm{sinc}\big((t-n)\pi\big).$$

Ainsi, la formule est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- Une autre application de la formule de Poisson est de montrer l'équation fonctionnelle de la fonction Θ de Jacobi, définie par

$$\Theta : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} \end{array}\right.$$

Cette fonction vérifie l'identité $\forall x > 0,\ \Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta\big(\frac{1}{x}\big)$. Pour montrer cela, fixons $x > 0$ et considérons l'application $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie par $f(t) = e^{-\pi t^2 x}$. Avec la normalisation de ce développement, on a $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{\pi\xi^2}{x}}$. Ainsi, en appliquant la formule de Poisson (**Théorème 1**) évaluée en 0, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) \quad \text{donc} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi k^2}{x}},$$

c'est-à-dire exactement $\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta\big(\frac{1}{x}\big)$.